

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ  
ADOLF HAIMOVICI

Etapa locală: 21 februarie 2016

Filiera teoretică: profilul științele naturii

Clasa XI

1. Știind că  $f(X) = X^2 + 2I_3$  iar  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  să se calculeze  $\det(A)$  și  $f(A)$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} - \{-q\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+px+p}{x+q}$  unde  $p$  și  $q \in \mathbb{R}$ .  
Găsiți  $p$  și  $q$  pentru care dreapta  $y = x + 1$  este asimptotă oblică spre  $+\infty$  a funcției  $f$  iar  $f(0) = 2$ .
3. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} - \{-q\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+px+p}{x+q}$  unde  $p$  și  $q \in \mathbb{R}$ .  
Găsiți o relație între  $p$  și  $q$  astfel încât  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right)^x = 1$ .
4. Codificarea unui mesaj folosind înmulțirea matricelor și pătratul lui Polybe:

	1	2	3	4	5
1	a	b	c	d	e
2	f	g	h	ij	k
3	l	m	n	o	p
4	q	r	s	t	u
5	v	w	x	y	z

Exemple: salut=43 11 31 45 44, la masa=31 11 32 11 43 11

Pentru complicarea codificării putem folosi matricea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  astfel: textul codificat cu pătratul Polybe, îl scriem sub forma unei matrice cu 2 linii și  $n$  coloane, în funcție de câte elemente avem (dacă e nevoie mai adăugăm un 0).

Salut = 43 11 31 45 44 devine matricea  $S = \begin{pmatrix} 43 & 31 & 44 \\ 11 & 45 & 0 \end{pmatrix}$ La masa = 31 11 21 15 31 devine matricea  $L = \begin{pmatrix} 31 & 32 & 43 \\ 11 & 11 & 11 \end{pmatrix}$ .

Înmulțim matricea  $A$  cu matricea  $S$  și obținem  $AS = \begin{pmatrix} 43 & 31 & 44 \\ 97 & 107 & 88 \end{pmatrix}$ . Destinatarul mesajului va primi textul codificat: 43 97 31 107 44 88 și matricea  $A$ . Pentru a-l descifra trebuie să calculeze inversa matricei  $A$ , după care să înmulțească  $A^{-1}$  cu matricea cu 2 linii și  $n$  coloane pe care o scrie din mesajul primit, adică  $\begin{pmatrix} 43 & 31 & 44 \\ 97 & 107 & 88 \end{pmatrix}$ , iar rezultatul să-l descifreze cu pătratul lui Polybe.

- a) Calculați inversa matricei  $A$ .
- b) Scrieți folosind pătratul lui Polybe textul: olimpiada
- c) Codificați folosind matricea  $A$  și procedeul descris mai sus textul: olimpiada
- d) Descifrați mesajul 13 37 31 86 21 66 13 37 44 88.

Notă: Timp de lucru 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.